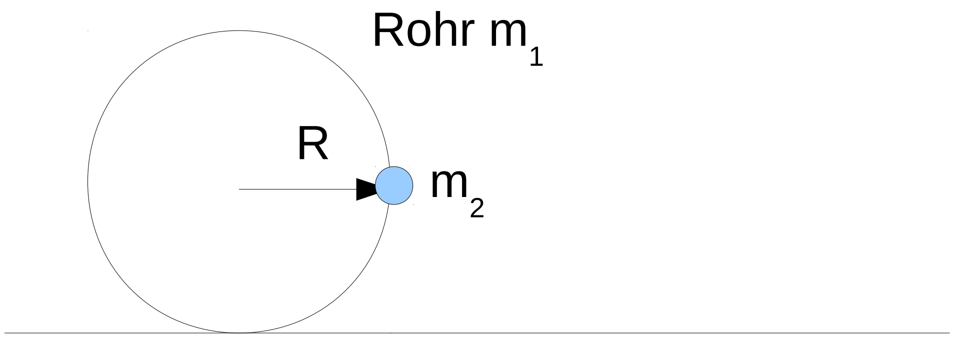
Physik Mechanik - Aufgaben zu Rotation und Schwingung

Rotationsschwingung eines Rollkörpers

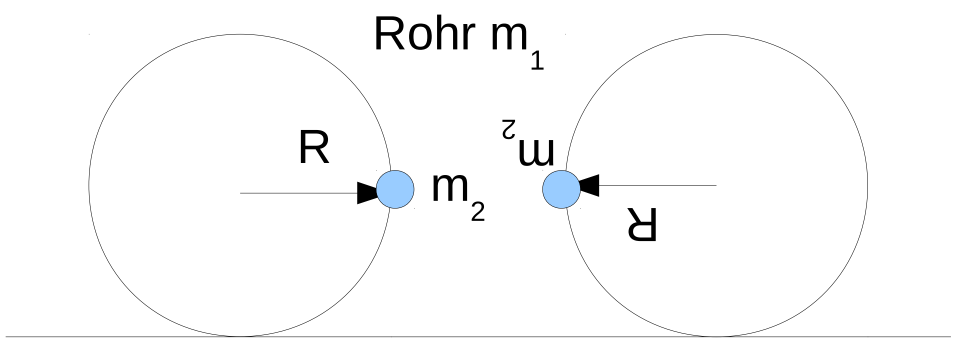
Rotationsschwingung eines Rollkörpers

Ein Rohrstück mit einem Gewicht über die gesamte Länge an der Seite angebracht wird losgelassen und schwingt durch die Rollbewegung hin und her. Berechnen Sie näherungsweise die Pendelfrequenz nach dem Loslassen.



Lösungshilfen

1. Linearisierung: Die Kraft der Masse m2 verhalte sich linear zur Auslenkung.
2. Nach einer halben Umdrehung, befinde sich die Masse m2 effektiv nur um eine Länge R weiterbewegt.



Lösung:

Die lineare Rückstellkraft entspricht einer Feder:

Kraft bei Vollauslenkung: $F_G = m_2 \cdot g$ Gravitationskraft

Federweg: $x = \frac{\pi}{2} \cdot R$ Strecke einer Vierteldrehung, Rückstellkraft ist Null wenn m2 sich ganz unten befindet. Daraus läßt sich die Federkonstante ermitteln.

Federkonstante: $k = \frac{F}{x} = \frac{m_2 \cdot g}{(\frac{\pi}{2} \cdot R)}$

Kräfteansatz:

$$F_G = \sum F_{rot} + \sum F_{trägh}$$

Bei der Rotation ist der Satz von Steiner zu berücksichtigen, da der Drehpunkt nicht der Achsenmittelpunkt ist, sondern um R verschoben ist. Der Rollpunkt ist die Drehachse, wenn der Körper rollt (d.h. dort wären auch die Kraftvektoren einzuzeichnen) und nicht gleitet (keine Bodenhaftung).

$$J_{ges} = \underbrace{m_1 \cdot R^2}_{\substack{\text{Hohlzylinder} \\ \text{dünnwandig}}} + \underbrace{m_1 \cdot R^2}_{\text{Satz von Steiner}} \qquad F_{rot} = J_{ges} \cdot \ddot{\varphi} = J_{ges} \cdot \dot{\omega}$$

Nur zum Vergleich beim Vollzylinder wäre das: $J_{ges} = \underbrace{\frac{m_1}{2} \cdot R^2}_{\text{Vollzylinder}} + \underbrace{m_1 \cdot R^2}_{\text{Satz von Steiner}}$

$$F_{trägh} = \underbrace{m_1 \cdot R \cdot \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Trägheit} \\ \text{Rohr}}} + \underbrace{m_2 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot R \cdot \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Trägheit} \\ \text{Masse } m_2}}$$

Der Faktor $\frac{\pi - 2}{\pi}$ berücksichtigt, dass die Masse m2, wenn das Rohr genau eine Halbdrehung von (3,14*R) macht, sich der Massenpunkt aber nur um (3,14*R-2R) weiter bewegt hat. Hierbei wird einfach auch angenommen, dass sich der Verlauf linear verhält.

In der nicht so stark vereinfachten Welt, wäre hier sonst eine Zykloide zu berechnen.

Und nun kann alles eingesetzt werden:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{D}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 R^2 + m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_2 R^2 + m_1 R + m_2 \frac{\pi - 2}{\pi} R}{\frac{m_2 g}{\frac{\pi}{2} R}}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{T}$$

Zum Vergleich mit Vollzylinder:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{D}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{m_1}{2} R^2 + m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_2 R^2 + m_1 R + m_2 \frac{\pi - 2}{\pi} R}{\frac{m_2 g}{\frac{\pi}{2} R}}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{T}$$

Die gesamte Gleichung (DGL 2. Ordnung) wäre:

$$\underbrace{m_2 \cdot g \cdot \varphi}_{\substack{\text{Rückstellkraft} \\ \text{entspricht Feder}}} = \underbrace{m_1 \cdot R \cdot \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Trägheit} \\ \text{Rohr}}} + \underbrace{m_2 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot R \cdot \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Trägheit} \\ \text{Masse } m_2}} + \underbrace{m_1 \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Hohlzylinder} \\ \text{dünnwandig}}} + \underbrace{m_1 \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi}}_{\text{Satz von Steiner}} + \underbrace{m_2 \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi}}_{\text{Masse } m_2} + \underbrace{m_2 \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi}}_{\text{Satz von Steiner}}$$

Die Herausforderungen bei diesen Aufgabentypen sind:

- Satz von Steiner anzuwenden.
- Die Übersetzungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und Translationsgeschwindigkeiten zu erkennen und als Faktoren zu berücksichtigen.