Mathematik: Übungsaufgaben zu Integralen 1

Integrale - gemischte Aufgaben

Verschiedene Aufgaben

1. $y=\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$

2. $\int \cos(\pi-2x)dx$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

4. $\int (x+1)^2 \cdot \sqrt{2-x}\ dx$

Lösungshilfen

1. Substitution, was könnte ähnlich nachdiff. Teil sein?
2. Substitution (Verschiebung)
3. Substitution (Wurzel oder Verschiebung)
4. Substitution (Wurzel oder Verschiebung)

Lösungen

1. $y=\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$
   1. Lösungsvariante:
      Falls der Kurvenverlauf der Funktion bekannt sein sollte und daher auch die symmetrie der positiven und negativen Fläche, kann sofort daraus folgern, dass hier Null das Ergebnis sein muss. Die Begründung (im Idealfall eine kleine Skizze des Graphen) muss aber angegeben werden.
      $y=\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx=0$
   2. Lösungsvariante:
      Die Stammfunktion des Integrals steht zufälligerweise in der Formelsammlung, die in der Prüfung verwendet werden darf. Unbedingt in der Prüfung angeben, wo diese entnommen wurde, Grenzen einsetzen und ausrechnen.
   3. Lösungsvariante:
      Es muss versucht werden dem Integral anzusehen, wie es am ehesten zu lösen wäre. Wenn ein Teil eine Ähnlichkeit mit einem nachdifferenzierten Teilterm hat, macht es oft Sinn es über den Weg der Substitution zu versuchen. Das erfordert einiges an Übung bis bei vielen Aufgaben auf Anhieb der richtige Ausdruck gefunden wird.
      Bei dieser Aufgabe hat der Ausdruck unter der Wurzel abgeleitet eine Ähnlichkeit mit

einer Funktion die als Faktor vor der Wurzel steht. Somit liegt folgende Substitution nahe:

$$u(x)=1-x^2 \quad \frac{\delta u(x)}{\delta x}=-2\mathrm{x} \quad \delta x=\frac{\delta u(x)}{-2\mathrm{x}}=\frac{1}{-2\mathrm{x}}\delta u(x)$$

Normalerweise werden die Bereichsgrenzen auch substituiert, allerdings bei dieser Aufgabe ist das nicht besonders sinnvoll, da hier jeweils der gleiche Wert herauskommt. In dem Stadium bereits wegen der Grenzen auf das Ergebnis Null zu schließen, trifft zu oft nicht zu.

$$u(x)=1-x^2 \quad u_1(x_1=-1)=1-(-1)^2=0 \quad u_2(x_2=1)=1-1^2=0$$

Durchführen der Substitution:

$$y=\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\delta x=\int_{u_1}^{u_2} x\sqrt{u}\frac{1}{-2\mathrm{x}}\ \delta u=\int_{u_1}^{u_2}(-\frac{1}{2}\sqrt{u})\ \delta u=-\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2}(\sqrt{u})\ \delta u=-\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} u^{\frac{1}{2}}\ \delta u$$

Integrieren und Rücksubstitution:

$$y=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\right]_{u_1}^{u_2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C\right]_{x_1=-1}^{x_2=1}$$

Grenzen einsetzen und berechnen.

$$y=-\frac{1}{2}\left[(\frac{2}{3}(1-1^2)^{\frac{3}{2}}+C)-(\frac{2}{3}(1-(-1)^2)^{\frac{3}{2}}+C)\right]=-\frac{1}{2}\left[(\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}})+(C-C)\right]=0$$

Wenn Grenzen vorhanden sind, fällt die Integrationskonstante C immer heraus. Wenn Sie zu unterschiedlichen Lösungen für die Stammfunktion auf Grund unterschiedlicher Rechenwege kommen, dann sind diese nicht unbedingt falsch. Den Ausdrücken ist oft nicht anzusehen, dass diese sich nur um eine Konstante C unterscheiden. In dem Falle plottet man sich am besten die beiden Graphen der Funktionen.

2. $\int \cos(\pi-2\mathrm{x})dx$
   1. Lösungsansatz
      Beim Ableiten der Funktion ergibt sich durch Nachdifferenzieren nur ein Faktor (-2) und somit wäre nur die Umkehrung des Faktors zu ergänzen und man wäre fertig.
   2. Lösungsansatz mittels Substitution

$$u=\pi-2\mathrm{x} \quad \frac{du}{dx}=-2 \quad dx=\frac{1}{-2}du$$

$$\int\cos(\pi-2\mathrm{x})dx=\int\cos(u)\frac{1}{-2}du=-\frac{1}{2}\int\cos(u)\ du=-\frac{1}{2}[\sin(u)]=-\frac{1}{2}[\sin(\pi-2\mathrm{x})]$$

3.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$$

   1. Lösungsweg
      Weil schon viele Aufgaben gerechnet wurden, wird folgendes erkannt:

$$\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{x+2-2}{\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)-2}{\sqrt{x+2}}=\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}-\frac{-2}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}-\frac{-2}{\sqrt{x+2}}$$

Methode der linearen Ergänzung, ähnlich der Methode der quadratischen Ergänzung, wurde hier verwendet.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int(\sqrt{x+2}-\frac{-2}{\sqrt{x+2}})\ dx=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-4\cdot\sqrt{(x+2)}$$

2. Lösungsweg
   Substitution - Verschiebungssubstitution

$u=x+2 \quad \frac{du}{dx}=1 \quad dx=1\,du$
$x=u-2$

$$y=\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int \left(\frac{(u-2)}{\sqrt{(u-2)+2}}\right)\cdot 1\ du=\int \left(\frac{(u-2)}{\sqrt{u}}\right)\cdot 1\ du=\int \left(\frac{u}{\sqrt{u}}-\frac{2}{\sqrt{u}}\right)\cdot\ du$$

$$y=\int \left(\sqrt{u}-\frac{2}{\sqrt{u}}\right)\cdot\ du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2\cdot 2u^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+4(x+2)^{-\frac{1}{2}}$$

3. Lösungsweg über Substitution der Wurzel und Ersetzung

$((g(x))^{0.5})'=(g(x))^{-0.5}\cdot(g(x))'$

Substitution

$u=\sqrt{x+2} \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}(\sqrt{x+2})^{-\frac{1}{2}} \quad dx=2\cdot\sqrt{x+2}\,du$

Ersetzung

$u=\sqrt{x+2} \quad u^2=x+2 \quad x=u^2-2$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\cdot 2\cdot\sqrt{x+2}\ du \quad =\int \frac{(u^2-2)}{\sqrt{x+2}}\cdot 2\cdot\sqrt{x+2}\ du=\int 2(u^2-2)\,du$$
$$=\int \frac{(u^2-2)}{\sqrt{u}}\cdot 2\cdot\sqrt{u}\ du=\int 2(u^2-2)\,du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int 2(u^2-2)\,du=2\left(\frac{1}{3}u^3-2\mathrm{u}\right)=\frac{2}{3}u^3-4\mathrm{u}=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{x+2}$$

4. $\int (x+1)^2\cdot\sqrt{2-x}\ dx$

1. Lösungsweg
   Substitution - Verschiebungssubstitution

$u=2-x \quad \frac{du}{dx}=-1 \quad dx=(-1)\,du$
$x=2-u$

$$y=\int (x+1)^2\cdot\sqrt{2-x}\ dx=\int ((2-u)+1)^2\cdot\sqrt{2-(2-u)}(-1)\ du=-\int (3-u)^2\cdot\sqrt{u}\ du$$

$$y=-\int (1-2\mathrm{u}+u^2)\cdot\sqrt{u}\ du=-\int \left(u^{\frac{1}{2}}-2\mathrm{u}^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{5}{2}}\right)\ du=-\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$y=-\left(9\cdot\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}-6\cdot\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}(2-x)^{\frac{7}{2}}\right)=-6(2-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}(2-x)^{\frac{7}{2}}$$

2. Lösungsweg über Substitution

$u=\sqrt{2-x} \quad \frac{du}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \quad dx=(-2\sqrt{2-x})\,du$
$x=2-u^2$

$$y=\int (x+1)^2\cdot\sqrt{2-x}\ dx=\int (x+1)^2\cdot\sqrt{2-x}\cdot(-2\sqrt{2-x})\ du=\int (x+1)^2\cdot(-2(2-x))\ du$$

$$y=\int (x+1)^2\cdot(x-2)\ du=\int ((2-u^2)+1)^2\cdot 2((2-u^2)-2)\ du=\int (3-u^2)^2\cdot(-2u^2)\ du$$

$$y=-2\int (9-6\mathrm{u}^2+u^4)\cdot(u^2)\ du=-2\int (9\mathrm{u}^2-6\mathrm{u}^4+u^6)\ du=-2\left(3\mathrm{u}^3-\frac{6}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7\right)$$

$$y=\left(-6\mathrm{u}^3+\frac{12}{5}u^5-\frac{2}{7}u^7\right)=\left(-6(2-x)^{3/2}+\frac{12}{5}(2-x)^{5/2}-\frac{2}{7}(2-x)^{7/2}\right)$$

Lösungen mit wxmaxima

(%i1)
```
I1: x*sqrt(1-x^2) ;
F1: integrate(I1, x) ;
integrate(I1, x, -1, 1) ;
/* Anbei noch die Teilintegrale */
integrate(I1, x, -1, 0) ;
integrate(I1, x, 0, 1) ;
diff(F1,x) ;
```

(%o1) $x\sqrt{1-x^2}$

(%o2) $-\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}$

(%o3) 0

(%o4) $-\frac{1}{3}$

(%o5) $\frac{1}{3}$

(%o6) $x\sqrt{1-x^2}$

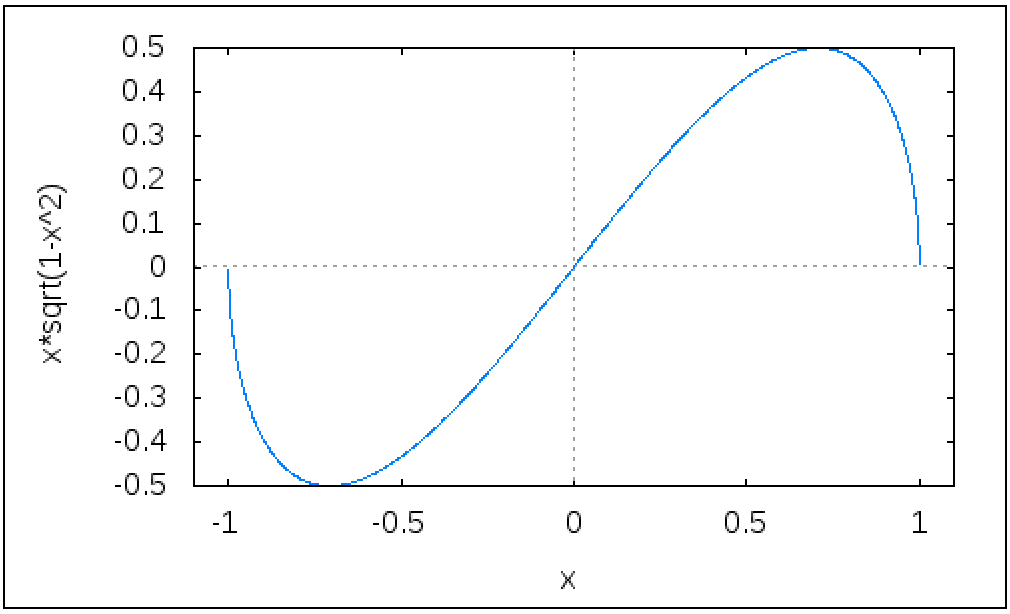
(%i7)
```
print("Funktion: ", I1) ;
wxplot2d([I1], [x,-1.1,1.1], [nticks,200]);
```

Funktion: $x\sqrt{1-x^2}$

(%o7) $x\sqrt{1-x^2}$

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting

(%t8)



(%o8)

(%i17)
```
I2: cos(%pi-2*x) ;
F2: integrate(I2, x) ;
```

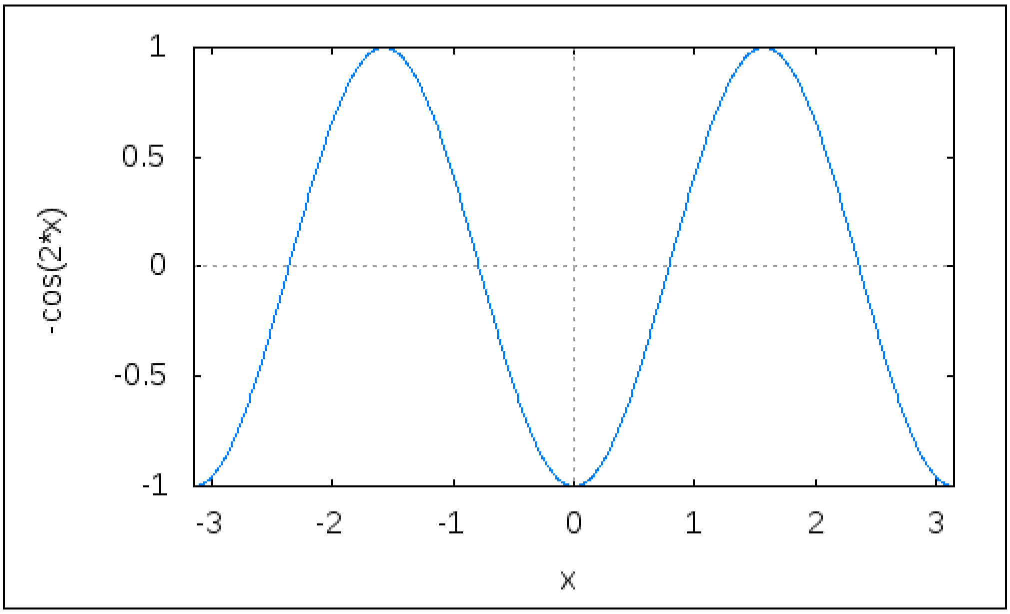
```
diff(F2,x) ;
wxplot2d([I2], [x,-%pi,%pi], [nticks,200]);
```

(%o17) $-\cos(2x)$

(%o18) $-\frac{\sin(2x)}{2}$

(%o19) $-\cos(2x)$

(%t20)



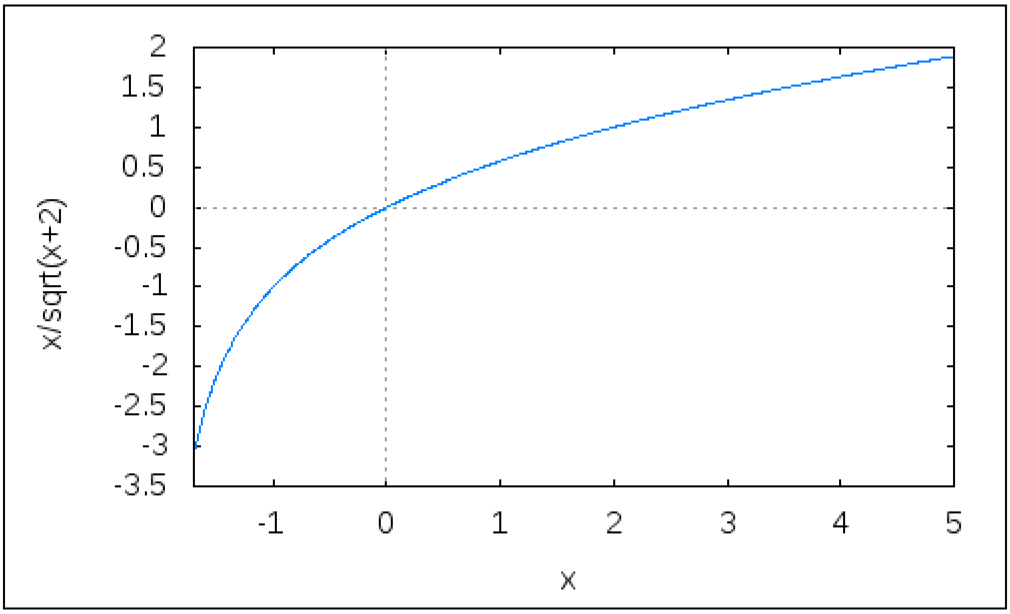
(%o20)

(%i37)
```
I3: x*(x+2)^(-1/2) ;
F3: integrate(I3, x) ;
diff(F3,x) ;
wxplot2d([I3], [x,-1.7,5], [nticks,200]);
```

(%o37) $\frac{x}{\sqrt{x+2}}$

(%o38) $\frac{2\,(x+2)^{3/2}}{3}-4\,\sqrt{x+2}$

(%o39) $\sqrt{x+2}-\frac{2}{\sqrt{x+2}}$

(%t40) 

(%o40)

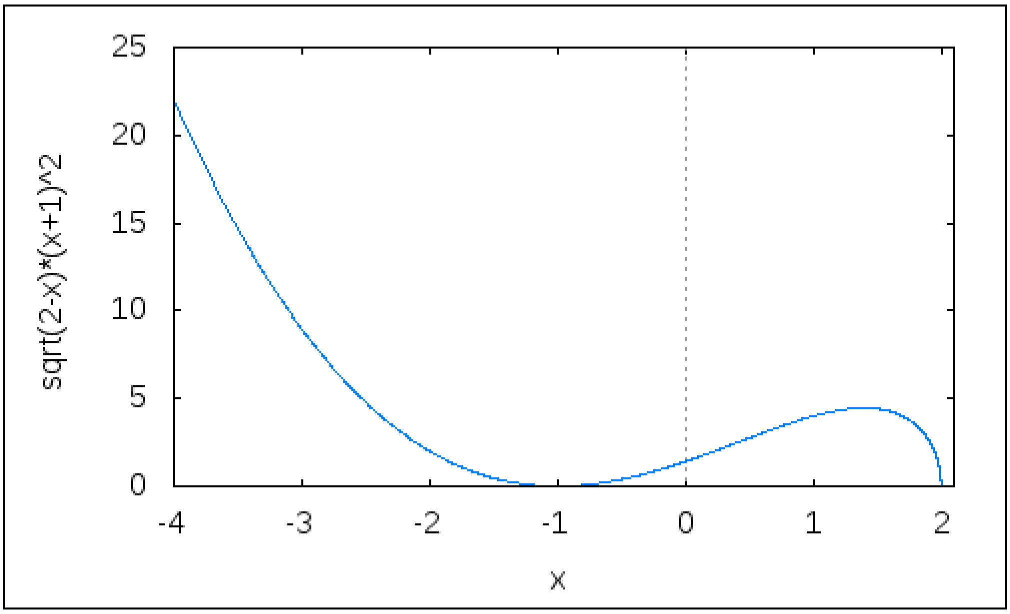
(%i61)
```
I4: (x+1)^2*sqrt(2-x) ;
F4: integrate(I4, x) ;
diff(F4,x) ;
wxplot2d([I4], [x,-4,2.1], [nticks,200]);
```

(%o61) $\sqrt{2-x}\,(x+1)^2$

(%o62) $$-\frac{2\left(5\,(2-x)^{7/2}-42\,(2-x)^{5/2}+105\,(2-x)^{3/2}\right)}{35}$$

(%o63) $$-\frac{2\left(-\frac{35\,(2-x)^{5/2}}{2}+105\,(2-x)^{3/2}-\frac{315\sqrt{2-x}}{2}\right)}{35}$$

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting

(%t64) 

(%o64)

Created with wxMaxima.