Mathematik: Übungsaufgaben zu Grenzwerten 2

Grenzwerte - Regeln des Marquis de l'Hôpital

Aufgaben

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\ln(1-\frac{1}{n}))$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+8n-1}-2n)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^9-\cos(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-5x-5}{x^3+x^2+x+1}$

Lösungshilfen

1. L'Hôpitalsche Regel - Umformen
2. L'Hôpitalsche Regel - Umformen (Brüche), binomische Formeln
3. L'Hôpitalsche Regel
4. L'Hôpitalsche Regel

Lösungen

1. Mögliche Fälle: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ , $\infty-\infty$

   $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\ln(1-\frac{1}{n}))$, Fall : $0\cdot\infty$ bzw. $\infty\cdot 0$,

   Lösungsweg 1 ist falsch und führt auch auf ein falsches Ergebnis!

   $\lim\limits_{x\to a\pm 0}(g\cdot h)=\lim\limits_{x\to a\pm 0}(g'\cdot h')$ Achtung falsch!

   $y=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\ln(1-\frac{1}{n}))=\lim\limits_{n\to\infty}(1\cdot\ln(1-\frac{1}{n})+n\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot(1-n^{-1})')$ Achtung falsch!

   $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(1-\frac{1}{n})+n\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot(0-(-1)n^{-2}))=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(1-\frac{1}{n})+n\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot n^{-2})$ Achtung falsch!

   $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{(1-\frac{1}{n})\cdot n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{(n-1)})=0$ Achtung falsch!

   Lösungsweg 2 (richtiger Weg):

$$\lim_{x\to a\pm 0}(g\cdot h) \overset{\text{Fall } \infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to a\pm 0}\left(\frac{g}{(\frac{1}{h})}\right) \overset{\text{Fall } \frac{\infty}{\infty} \text{ oder } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a\pm 0}\left(\frac{h}{(\frac{1}{g})}\right)$$

Ein Gefühl dafür, welche der beiden Möglichkeiten besser zum Weiterrechnen wäre, kann nur über das Rechnen von mehreren Aufgaben erlangt werden.

$$y=\lim_{n\to\infty}(n\cdot\ln(1-\frac{1}{n}))=\lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})})=\lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(1-n^{-1})}{n^{-1}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{(1-n^{-1})^{-1}\cdot(1-n^{-1})'}{(-1)\cdot n^{-2}})$$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{(1-n^{-1})^{-1}\cdot(0-(-1)n^{-2})}{(-1)\cdot n^{-2}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{(1-n^{-1})^{-1}\cdot n^{-2}}{(-1)\cdot n^{-2}})=\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{1-\underbrace{n^{-1}}_{\to 0}})=-1$$

2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4\text{n}^2+8\text{n}-1}-2\text{n})$

Erster Lösungsversuch:

Fall : $\infty-\infty$: $f-g=(f-g)\frac{(\frac{1}{g})}{(\frac{1}{g})}=\frac{(\frac{f}{g}-1)}{(\frac{1}{g})}\frac{(\frac{1}{f})}{(\frac{1}{f})}=\frac{(\frac{1}{g}-\frac{1}{f})}{(\frac{1}{g})(\frac{1}{f})}$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4\text{n}^2+8\text{n}-1}-2\text{n})=\lim_{n\to\infty}((4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{1}{2}}-(2\text{n})^1)=\lim_{n\to\infty}(\frac{(2\text{n})^{-1}-(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{1}{2}}}{(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\text{n})^{-1}})$$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{-(2\text{n})^{-2}\cdot 2-(-\frac{1}{2})(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(8\text{n}^1+8)}{(-\frac{1}{2})(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(8\text{n}+8)\cdot(2\text{n})^{-1}+(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot(2\text{n})^{-2}\cdot 2})$$

Erster Erweiterungsversuch, das Ergebnis ist nicht interpretierbar, da Nenner und Zähler noch ins unendliche Streben.

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{-\frac{1}{2}n^{-2}+4\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(n+1)}{-2\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(n+1)\cdot n^{-1}-\frac{1}{2}\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot n^{-2}})\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{3}{2}}}{(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{-\frac{1}{2}\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{3}{2}}-4\cdot(n^3+n^2)}{-2\cdot(n^2+n^1)-\frac{1}{2}\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)})$$ Und hier geht es so aufwendig weiter...

Zweiter Erweiterungsversuch:

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{-\frac{1}{2}n^{-2}+4\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(n+1)}{-2\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(n+1)\cdot n^{-1}-\frac{1}{2}\cdot(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot n^{-2}})\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{1}{2}}}{(4\text{n}^2+8\text{n}-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Diese Aufgabe ist aber so nicht zu knacken. Es entsteht bei einer geeigneten Erweiterung zwar im Zähler ein fester Grenzwert aber im Nenner tritt dann wieder ein Fall unendlich minus unendlich auf.

Zweiter Lösungsversuch:

Hier muss ein anderes Verfahren gewählt werden. Dieses Methode verwendet die

Binomischen Formel: $a-b=(a-b)\cdot\frac{a+b}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}$

Damit lassen sich diese Aufgaben plötzlich gut berechnen.

$$y=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+8n-1}-2n)=\lim_{n\to\infty}((\sqrt{4n^2+8n-1}-2n)\cdot\frac{\sqrt{4n^2+8n-1}+2n}{\sqrt{4n^2+8n-1}+2n})$$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{(4n^2+8n-1)-4n^2}{\sqrt{4n^2+8n-1}+2n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{8n-1}{\sqrt{4n^2+8n-1}+2n})(\frac{n^{-1}}{n^{-1}})$$

$$y=\lim_{n\to\infty}(\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}}+2})=\frac{8-(0)}{\sqrt{4+(0)-(0)}+2}=\frac{8}{\sqrt{4}+2}=\frac{8}{2+2}=2$$

Nur über diesen Weg läßt sich dieser Typ (markant ist die Wurzel) von Aufgaben lösen.

3. $\lim_{x\to1}\frac{x^9-\cos(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ Fall $\frac{0}{0}$:

$$y=\lim_{x\to1}\frac{x^9-\cos(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{9x^8+\sin(x-1)}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{9}{(1/2)}=18$$

4. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-5x-5}{x^3+x^2+x+1}$ Fall $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-5x-5}{x^3+x^2+x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-5}{3x^2+2x+1}=\frac{3-2-5}{3-2+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

Lösungen mit wxmaxima

Bei einer der Aufgaben hat GNU maxima bzw. wxmaxima ein fehlerhaftes Ergebnis ausgegeben. Also niemals einem Ergebnis blind vertrauen und immer mit schätzen, was herauskommen sollte. Gute Anhaltspunkte liefert fast immer der Graph der Funktion zur eigenen Kontrolle.

```
        limit(n*log(1-1/n), n, inf);
        limit(sqrt(4*n^2+8*n-1)-2*n,n,inf);

        /* Ein Beispiel, wo maxima Fehler macht */
        G1: (x^9-cos(x-1))/(sqrt(x)-1) ;
(%i103) limit(G1,x,1) ;
        limit(G1, x, 1, plus);
        limit(G1, x, 1, minus);
        tlimit(G1, x, 1);

        limit((x^3+x^2-5*x-5)/(x^3+x^2+x+1),x,-1);
```

build_info ();

(%o103) -1

(%o104) 2

(%o105) $\dfrac{x^9-\cos(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

(%o106) 0

(%o107) 18

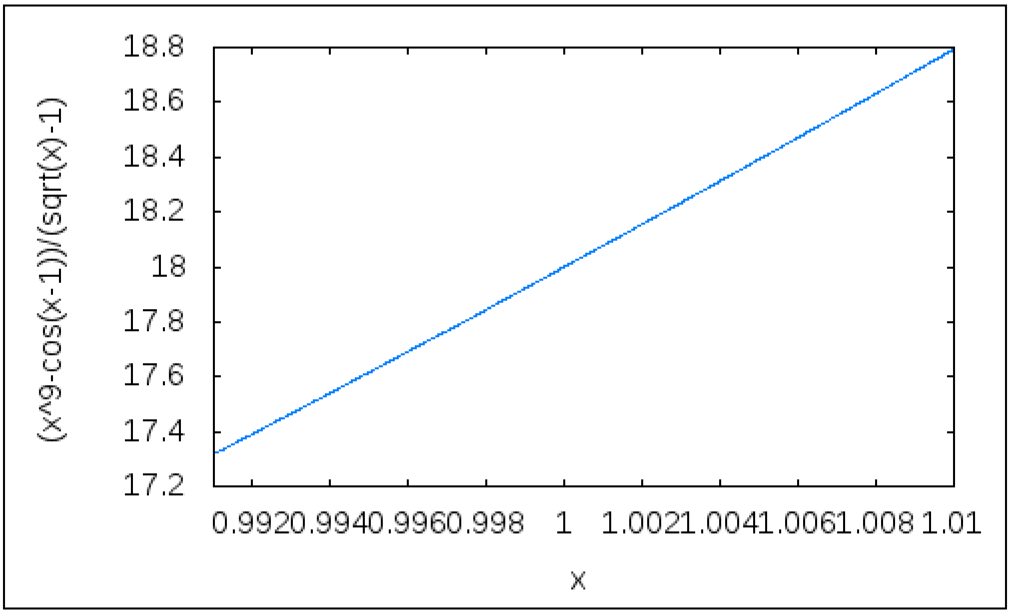
(%o108) 0

(%o109) 18

(%o110) -2

(%o111) build_info(5.27.0,2012-05-09 19:58:25,i686-pc-linux-gnu,GNU Common Lisp

(%i122) wxplot2d([G1], [x,0.991,1.01], [nticks,200])$

(%t122) 

```
(%i123) G1: (x^9-cos(x-1))/(sqrt(x)-1) ;
        limit(G1,x,1),numer;
        limit(G1,x,1);
```

(%o123) $\frac{x^9-\cos(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

```
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -504.0 by -504/1 = -504.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1008.0 by -1008/1 = -1008.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1260.0 by -1260/1 = -1260.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1008.0 by -1008/1 = -1008.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -504.0 by -504/1 = -504.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -144.0 by -144/1 = -144.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -18.0 by -18/1 = -18.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -504.0 by -504/1 = -504.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1008.0 by -1008/1 = -1008.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1260.0 by -1260/1 = -1260.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -1008.0 by -1008/1 = -1008.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -504.0 by -504/1 = -504.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -144.0 by -144/1 = -144.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced -18.0 by -18/1 = -18.0
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
(%o124) 18.0
(%o125) 0
```

Finde den Fehler!

1. $$y = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+8n-1}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left((4n^2+8n-1)^{-\frac{1}{2}}-2n^1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^{-1}-(4n^2+8n-1)^{\frac{1}{2}}}{(4n^2+8n-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2n^{-1}}\right)$$

2. Was ist $\frac{9}{\frac{5}{7}}$: 9/35 oder 63/5 ?

Lösung:

1. Beim 2n wurde beim invertieren nur das n und nicht auch der 2er invertiert, und es muss +1/2 anstelle der Wurzel im Exponenten stehen.
2. Eindeutig wird es mit der Klammer, vor allem wenn nicht mehr zu sehen ist, welcher Bruchstrich dicker ist: $\frac{9}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ ist also 63/5.