Mathematik: Übungsaufgaben zu Grenzwerten

Grenzwerte - L'Hopitalsche Regeln

Aufgaben

1. Nennen Sie alle Fälle der L'Hopitalsche Regeln.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(2x)}{(\sinh(x))^2}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

Lösungshilfen

1. Schreibweise mit Null und Unendlich.
2. L'Hopitalsche Regel - einfachste Standardfall
3. L'Hopitalsche Regel
4. L'Hopitalsche Regel
5. L'Hopitalsche Regel mehrfach anwenden + Ableitungsregeln sinh, cosh
6. sinh u. cosh in Exponentenschreibweise
7. L'Hopitalsche Regel mehrfach anwenden, Umformen in anderen Fall

Lösungen

1. Mögliche Fälle: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ , $\infty - \infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

   Lösungsweg 1:

Es steht in der Formelsammlung unter besondere Grenzwerte. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

Lösungsweg 2:

Fall $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\delta}{\delta x}(\sin(x))}{\frac{\delta}{\delta x}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{\cos(0)}{1}=\frac{1}{1}=1$

In dem Falle wird jeweils der Nenner und der Zähler getrennt abgeleitet. Dies bitte nicht verwechseln mit der Quotientenregel bei der Ableitung/Differentation.

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Fall $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{1+x})}{1}=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1+x})=(\frac{1}{1+0})=1$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Fall $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'}=\lim_{x\to infinty}\frac{(\frac{1}{1+x})}{1}=\lim_{x\to\infty}\overbrace{(\frac{1}{\underbrace{1+x}_{\to\infty}})}^{\to 0}=0$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(2x)}{(\sinh(x))^2}$

Fall $\frac{0}{0}$: $y=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(2x)}{(\sinh(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cdot\sin(2x))'}{((\sinh(x))^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{((x)'\cdot(\sin(2x))+(x)\cdot(\sin(2x))')}{2\cdot\sinh(x)\cdot(\sinh(x))'}$

$y=\lim_{x\to 0}\frac{((1)\cdot(\sin(2x))+(x)\cdot(\cos(2x))\cdot(2x)')}{2\cdot\sinh(x)\cdot(\cosh(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(2x)+(x)\cdot(\cos(2x))\cdot(2))}{2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh(x)}$

$y=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+2x\cdot\cos(2x)}{2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh(x)}\overset{\text{Fall }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(2x)+2(1\cdot\cos(2x)+x(-\sin(2x))\cdot 2)}{2\cdot(\sinh(x)\cdot\sinh(x)+\cosh(x)\cdot\cosh(x))}$

$y=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\cos(2x)-4x\cdot\sin(2x)}{2\cdot(\sinh(x))^2+2\cdot(\cosh(x))^2}=\frac{4}{2}=2$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Fall $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{e^x-e^{-x}}{2})}{(\frac{e^x+e^{-x}}{2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\overset{\lim_{x\to\infty}e^{-2x}=0}{=}1$

7. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

Fall : $\infty-\infty$: $f-g=(f-g)\frac{(\frac{1}{g})}{(\frac{1}{g})}=\frac{(\frac{f}{g}-1)}{(\frac{1}{g})}\frac{(\frac{1}{f})}{(\frac{1}{f})}=\frac{(\frac{1}{g}-\frac{1}{f})}{(\frac{1}{g})(\frac{1}{f})}$

Diese Methode wandelt den Fall $\infty - \infty$ in einen Fall $\frac{0}{0}$ um.

$$y = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1 \cdot \ln(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}}\right)$$

$$y = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - (1+x)^{-1}}{\ln(1+x) + x(1+x)^{-1}}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{0 - (-1)(1+x)^{-2}}{(1+x)^{-1} + 1 \cdot (1+x)^{-1} + x(-1)(1+x)^{-2}}\right)$$

$$y = \lim_{x \to 0}\left(\frac{(1+x)^{-2}}{2 \cdot (1+x)^{-1} - x(1+x)^{-2}}\right)$$

$$y = \lim_{x \to 0}\left(\frac{(1+x)^{-2}}{2 \cdot (1+x)^{-1} - x(1+x)^{-2}} \frac{(1+x)^{2}}{(1+x)^{2}}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2 \cdot (1+x) - x}\right) = \frac{1}{2 \cdot (1+0) - 0} = \frac{1}{2}$$

Lösungen mit wxmaxima

```
        limit(sin(x)/x, x, 0);
        limit(log(x+1)/x, x, 0);
        limit(log(x+1)/x, x, inf);
(%i85)  limit(x*sin(2*x)/(sinh(x)^2), x, 0);
        limit(sinh(x)/cosh(x), x, inf);
        limit((%e^(x)-%e^(-x))/(%e^(x)+%e^(-x)), x, inf);
        limit(1/log(1+x)-1/x, x, 0);
```

(%o85) 1

(%o86) 1

(%o87) 0

(%o88) 2

(%o89) 1

(%o90) 1

(%o91) $\frac{1}{2}$
