Mathematik: Übungsaufgaben zu Ableitungen

Ableitungen

Einfache Aufgaben

1. $y=x^3+2x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}-2x^{-3}+5\ln(x)$
2. $y=x\sqrt{x}$
3. $y=x\cdot\ln(x)$
4. $y=e^x$
5. $y=e^{2x}$
6. $y=\ln(x)$
7. $y=\ln(2x)$
8. $y=3\cdot\ln(x^2)$
9. $y=3\cdot\ln(2+\sin(x))$
10. $y=2\cdot\ln\left(\frac{e^x}{\sin(x)}\right)$

Lösungshilfen

1. Standardformel für Polynome
2. Produktregel oder Zusammenfassen
3. Produktregel
4. Auswendig wissen
5. Kettenregel
6. Auswendig wissen
7. Kettenregel
8. Kettenregel
9. Kettenregel und Auswendig wissen
10. Kettenregel+Quotientenregel oder Kettenregel+Produktregel

Lösungen

1. $y=x^3+2x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}-2x^{-3}+5\ln(x)$

   $y'=3x^2+4x^1+x^0+0+(-1)x^{-2}+(-2)x^{-3}-2(-3)x^{-4}+5\frac{1}{x}$

   $y'=3x^2+4x+1-x^{-2}-2x^{-3}+6x^{-4}+\frac{5}{x}$
2. $y=x\sqrt{x}$

   Lösungsweg 1:

   $y'=(x)'\cdot(x^{\frac{1}{2}})+(x)\cdot(x^{\frac{1}{2}})'=(1)\cdot(x^{\frac{1}{2}})+(x)\cdot((\frac{1}{2})x^{(\frac{1}{2}-1)})=x^{\frac{1}{2}}+(x)\cdot(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}$

   $y'=x^{\frac{1}{2}}+(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}+1}=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

   Lösungsweg 2:

   $y=x\sqrt{x}=x^{1.5}=x^{\frac{3}{2}}$

$$y'=(x^{1.5})'=1.5\cdot x^{0.5}=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{x}}{2}$$

Lösungsweg 3:

$$y=x\sqrt{x}=x\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$$y'=\frac{x^2}{\sqrt{x}}'=\frac{(x^2)'\cdot(\sqrt{x})-x^2\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{(2x)\cdot(\sqrt{x})-x^2\cdot(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{x}=\frac{(2x^{\frac{3}{2}})-(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}})}{x}=\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Anmerkung: Für die spätere Lösung von ineinander geschachtelten Ableitungsregeln, ist diese geistige Flexibilität die verschiedenen Wege zu sehen durchaus notwendig.

3. $y=x\cdot\ln(x)$

Lösungsweg 1:

$$y'=(x)'\cdot(\ln(x))+(x)\cdot(\ln(x))'=(1)\cdot(\ln(x))+(x)\cdot(\frac{1}{x})=\ln(x)+1$$

Lösungsweg 2:

$$y=x\cdot\ln(x)=\ln(x^x)=\ln(e^{\ln(x^x)})=\ln(e^{x\cdot\ln(x)})$$

$$y'=\frac{1}{e^{x\cdot\ln(x)}}\cdot e^{x\cdot\ln(x)}\cdot(x\cdot\ln(x))'=1\cdot(\ln(x)+1)=\ln(x)+1$$

Einmal im Kreis gedreht beim 2. Lösungsweg und das Ergebnis aus dem 1. Lösungsweg zur Hilfe genommen. Es gibt wunderbare Aufgaben mit ln(x)+1 und ln(x+1) gemischt, bei denen ohne saubere (zum Teil überflüssig anmutende) Klammersetzung die Rechenfehler zuschlagen.

4. $y=e^x$

$$y'=(e^x)'=(e^x)\cdot(x)'=e^x\cdot 1=e^x$$

So kompliziert sollten Sie die einfache Aufgabe auch rechnen können, um zu sehen, wie Kettenregeln verschachtelt sein können.

5. $y=e^{2x}$ $\quad y'=(e^{2x})'=(e^{2x})\cdot(2x)'=e^x\cdot 2=2\cdot e^x$

Es geht auch noch umständlicher.

$$y'=(e^{2x})'=(e^{2x})\cdot(2x)'=e^x\cdot((2)'\cdot(x)+(2)\cdot(x)')=e^x\cdot((0)\cdot(x)+(2)\cdot(1))=e^x\cdot(2)=2\cdot e^x$$

6. $y=\ln(x)$ $\quad y'=(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

7. $y=\ln(2x)$ $\quad y'=(\ln(2x))'=\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{2x}\cdot(2)=\frac{1}{x}$

Überraschenderweise kommt hier das gleiche Ergebnis heraus, wie ohne den Zweier. Das ist Merkwürdig, aber trotzdem richtig.

8. $y=3\cdot\ln(x^2)$

Weg 1 über Kettenregel:

$$y'=3\cdot\frac{1}{(x^2)}\cdot(x^2)'=3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(2x)=\frac{6}{x}$$

Weg 2 über Umformung mittels Rechengesetze:

$$y=3\cdot\ln(x^2)=3\cdot 2\ln(x)=6\cdot\ln(x) \qquad y'=(6\cdot\ln(x))'=6\cdot\frac{1}{x}=\frac{6}{x}$$

9. $y=3\cdot\ln(2+\sin(x))$

$$y'=3\cdot\frac{1}{2+\sin(x)}\cdot(2+\sin(x))'=\frac{3}{2+\sin(x)}\cdot(\cos(x))=\frac{3\cdot\cos(x)}{2+\sin(x)}$$

10. $y=2\cdot\ln(\frac{e^x}{\sin(x)})$

Weg 1:

$$y'=2\cdot\frac{1}{(\frac{e^x}{\sin(x)})}\cdot(\frac{e^x}{\sin(x)})'=2\cdot\frac{\sin(x)}{e^x}\cdot\frac{(e^x)'\cdot(\sin(x))-(e^x)\cdot(\sin(x))'}{(\sin(x))^2}$$

$$y'=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{(e^x)\cdot(\sin(x))-(e^x)\cdot(\cos(x))}{\sin(x)}=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{(e^x)\cdot(\sin(x))-(e^x)\cdot(\cos(x))}{\sin(x)}$$

$$y'=2\cdot\frac{(\sin(x))-(\cos(x))}{\sin(x)}=2\cdot(1-\frac{\cos(x)}{\sin(x)})=2\cdot(1-\cot(x))=2\cdot(1-\frac{1}{\tan(x)})$$

Weg 2:

$$y=2\cdot\ln(\frac{e^x}{\sin(x)})=2\cdot\ln(e^x)-2\cdot\ln(\sin(x))=2\mathrm{x}-2\cdot\ln(\sin(x))$$

$$y'=2-2\cdot\frac{1}{\sin(x)}\cdot(\sin(x))'=2-2\cdot\frac{1}{\sin(x)}\cdot(\cos(x))=2\cdot(1-\frac{\cos(x)}{\sin(x)})=2\cdot(1-\frac{1}{\tan(x)})$$