Übungsaufgaben Mathematik

Komplexe Zahlen

1.1) Schreiben Sie das Ergebnis des folgenden komplexen Ausdrucks in der eulerschen Form bzw. Polardarstellung.

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{-2-2\mathrm{i}}$$

1.2) Berechnen Sie alle Lösungen von folgendem Ausdruck:

$$z^3=-8$$
$$z^4=-8-8\mathrm{i}$$

1.3) Wo liegen die Punkte?

$$|z-3|=|z+1-2\mathrm{i}|$$
$$|z-3|=|1-2\mathrm{i}-\bar{z}|$$

1.4) Wo liegen die Punkte?

$$5\mathrm{z}^2-10z+20=25$$ (z oder x - nicht immer paßt es)
$$5\mathrm{x}^2-10x+20=-25$$

1.5) Schreiben Sie das Ergebnis des folgenden komplexen Ausdrucks in der trigonometrischen Form:

$$\frac{6-\sqrt{2}\cdot i}{i}-\frac{3\mathrm{i}+1}{i-3}$$

1.6) Wo liegen die Punkte?

$$\Im(z)=|z-\frac{i}{2}|$$

2. Matrizen / Determinanten

2.1) Für welche a und b ist die Determinante ungleich Null?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & a & 1\\ 7 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & b & 1\end{pmatrix}$$

2.2a) Für welchen Wert oder Wertebereiche von a ist die Matrix A invertierbar?
2.2b) Für welchen Wert oder Wertebereiche von a ist die Matrix A orthogonal?

$$A=\begin{pmatrix}a & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

2.3) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix/en:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2.4) Berechnen Sie a für den angegebenen Rang der Matrix:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 1\\ 7 & -1 & -1 & 1\\ 1 & a & 4 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Rang}=3$$

Lösungen

1.1) Quadranten beachten!

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{-2-2\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\cdot e^{i\left(\frac{8}{12}\right)\pi}}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot e^{i\left(\frac{15}{12}\right)\pi}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}}\cdot e^{i\left(\frac{8}{12}-\frac{15}{12}\right)\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(-\frac{-7}{12}\right)\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{17}{12}\right)\pi}$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{-2-2\mathrm{i}}=\frac{(-1+\sqrt{3}i)(-2+2\mathrm{i})}{(-2-2\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{4-4\mathrm{i}^2}=\frac{(2-2\sqrt{3})-(2+2\sqrt{3})i}{8}$$

$$(2-2\sqrt{3})^2-(2+2\sqrt{3})^2=4+4\cdot 3-4\sqrt{3}+4+4\cdot 3+2\sqrt{3}=32$$

$$\tan(\varphi)=\frac{-(2+2\sqrt{3})}{(2-2\sqrt{3})}=\frac{-(1+\sqrt{3})}{-(\sqrt{3}-1)} \text{ => Quadrant 180-270 Grad}$$

$$\varphi=75\,\text{Grad d.h. 245 Grad bzw. } \frac{17}{12}\pi$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{8}\cdot e^{i\left(\frac{17}{12}\right)\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{17}{12}\right)\pi}$$

1.2) ‚n-te Wurzeln' $z_{n;k=0,1,2}=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\cdot(\pi+k\cdot 2\pi)\frac{1}{n}}=2\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{n}\right)}=2\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}\right)}$

$$z_{n;k=0,1,2,3}=\sqrt[4+2]{8^2+8^2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{5}{4}\pi+k\cdot 2\pi\right)\frac{1}{n}}=2^{7\frac{1}{2}\frac{1}{4}}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{5\pi+k\cdot 8\pi}{4\mathrm{n}}\right)}=2^{\frac{7}{8}}¿e^{i\cdot\left(\frac{5\pi+k\cdot 8\pi}{16}\right)}$$

1.3a) Idee: Ansatz z=a+bi $|z-3|=|z+1-2\mathrm{i}|$ $|a+bi-3|=|a+bi+1-2\mathrm{i}|$

$|(a-3)+bi|=|(a+1)+(b-2)i|$ $\sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}$

$(a-3)^2+b^2=(a+1)^2+(b-2)^2$ $(a^2-6\mathrm{a}+9)+b^2=(a^2+2\mathrm{a}+1)+(b^2-4\mathrm{b}+4)$

$a^2-6\mathrm{a}+9+b^2=a^2+2\mathrm{a}+1+b^2-4\mathrm{b}+4$ $-6\mathrm{a}+9=2\mathrm{a}-4\mathrm{b}+5$

$4\mathrm{b}=8\mathrm{a}-4$ $b=2\mathrm{a}-1$

$z(a)=a+ib=a+i(2\mathrm{a}-1)=-i+(1+2\mathrm{i})a$

Geradengleichung: t-Abschnitt: -i und Steigung: (1+2i)

1.3b) Idee: Ansatz z=a+bi $|z-3|=|1-2\mathrm{i}-\bar{z}|$ $|(a+bi)-3|=|1-2\mathrm{i}-(a-ib)|$

$|(a-3)+bi|=|(1-a)+(b-2)i|$ $\sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(b-2)^2}$

$(a-3)^2+b^2=(1-a)^2+(b-2)^2$ $(a^2-6\mathrm{a}+9)+b^2=(a^2-2\mathrm{a}+1)+(b^2-4\mathrm{b}+4)$

$a^2-6\mathrm{a}+9+b^2=a^2-2\mathrm{a}+1+b^2-4\mathrm{b}+4$ $6\mathrm{a}+9=-2\mathrm{a}+1-4\mathrm{b}+4$

$4\mathrm{b}=-8\mathrm{a}-4$ $b=\frac{-8\mathrm{a}-4}{4}=-2\mathrm{a}-1$

$z(a)=a+ib=a+i(-2\mathrm{a}-1)=-i+(1-2\mathrm{i})a$

Geradengleichung: t-Abschnitt: -i und Steigung: (1-2i)

1.4a) Lösung nicht bereinigt oder nachgeprüft: $5\mathrm{z}^2-10z+20=25$ Idee: Ansatz z=a+bi

$0=5(a+ib)^2-10(a+ib)-5=5\mathrm{a}^2-5\mathrm{b}^2+10abi-10a^2+10b^2-20abi-5$

$0=-5\mathrm{a}^2+5\mathrm{b}^2-10abi-5\Rightarrow 0=+b^2-2abi-(1+a^2)$

$$b_{1/2}=\frac{2ai}{2}\pm\frac{\sqrt{(2ai)^2-4(-1)(1+a^a)}}{2}=ai\pm\sqrt{-a^2+1+a^a}=ai\pm\sqrt{1}=i(a\pm\sqrt{2\mathrm{a}^2+1})$$

b muss reell sein, d.h. Lösung nur für bestimmte a:

$b_{1/2}=i(a\pm\sqrt{2a^2+1})=c_1+0\cdot i\Rightarrow 0=(a\pm\sqrt{2a^2+1})$

$a_{1/2}=\pm\sqrt{2a_{1/2}^2+1}$ $\quad a_{1/2^2}=2a_{1/2}^2+1$ $\quad$ - $a_{1/2^2}=-1$

Keine reelle Lösung somit keine Lösung (ungünstige Kombination)

Anderer Weg: $z_{1/2}=\frac{-2}{2}\pm\frac{\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)}}{2}=-1\pm\frac{\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

1.4b) $5x^2-10x+20=-25$ Lösung nicht bereinigt oder nachgeprüft:

$x_{1/2}=1\pm 2\sqrt{2}\cdot i$ (zwei einzelne Punkte!)

1.5) $\frac{6-\sqrt{2}\cdot i}{i}-\frac{3i+1}{i-3}=\frac{(6-\sqrt{2}\cdot i)(-i)}{i\cdot(-i)}-\frac{(3i+1)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)}=\frac{-6i-\sqrt{2}}{1}-\frac{-3i^2-9i-i-3}{10}$

$=\frac{-60i-10\sqrt{2}}{10}-\frac{-10i}{10}=-6i-\sqrt{2}+i=-5i-\sqrt{2}$

Imag=-5, Realteil=- $\sqrt{2}$ $\qquad \phi=\arctan\left(\frac{-5}{-\sqrt{2}}\right)=74,2°+180°=0,4123\pi+\pi$

$z=-\sqrt{2}-5i=\sqrt{27}\cdot(\cos(1,4123\pi)+\sin(1,4123\pi))$

1.6) $\Im(z)=|z-\frac{i}{2}|$ $\qquad b=\sqrt{a^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2-b+\frac{1}{4}}$

$b^2=a^2+b^2-b+\frac{1}{4}$ $\qquad b=a^2+\frac{1}{4}$ $\quad$ Parabel nach oben geöffnet

$\Im(z)=|z+\frac{i}{2}|$ $\qquad b=\sqrt{a^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2+b+\frac{1}{4}}$

$b^2=a^2+b^2+b+\frac{1}{4}$ $\qquad b=-a^2-\frac{1}{4}$ $\quad$ Parabel nach unten geöffnet

$\Im(z)=(\mathrm{Re}(z))^2+\left(\mathrm{Im}(z-\frac{i}{2})\right)^2$ $\qquad b=a^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=a^2+b^2+\frac{1}{4}-b$

$a^2+b^2-2b=-\frac{1}{4}$

Quadratische Ergänzung

$a^2+b^2-2b+2b+1-1-2b=a^2+b^2-2b+1+2b-1-2b=a^2+(b-1)^2-2b-1+2b=-\frac{1}{4}$

$a^2+(b-1)^2=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$ Es ergibt sich eine Kreisgleichung M=(0, j), $r^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.1) Det=12b, d.h. a beliebig und b <> 0;

2.2) Det=6a+15; Für a<>-15/6;

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+5 & 2a-4 & 2-a \\ 2a-4 & 9 & 0 \\ 2-a & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

a=2 erfüllt die Bedingung; Hinweis: $A\cdot A^T=|A||A^T|E$ bzw. $\frac{A\cdot A^T}{|A||A^T|}=E$

Für A und A^T ist Det=3

2.3) $$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4) Für a=2 ist Det=0 und Rang=3