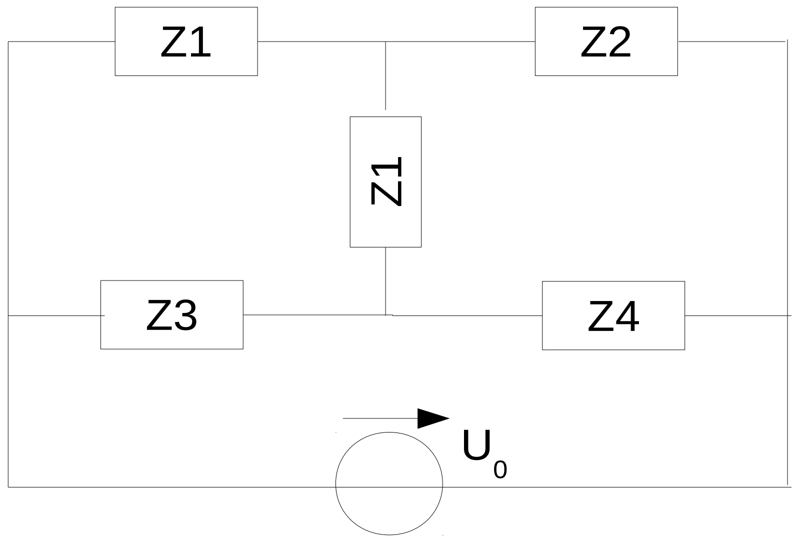
Elektrotechnik - Brückenschaltung

1 Die Brückenschaltung mit komplexen Widerständen

1.1 Aufbau der Brückenschaltung mit Belastung



1.2 Lösung bei abgeglichener Brückenschaltung

Wenn die Brücke abgeglichen ist, dann liegen in beiden Zweigen, die gleichen Spannungsteilerverhältnisse vor. In dem Falle ist der Spannungsabfall an Z2 und Z4 gleich.

Für die Spannung an Z5 gilt: $U_{Z5}=U_{Z4}-U_{Z2}=0$ und damit $I_{Z5}=\frac{U_{Z5}}{Z_5}=\frac{0}{Z_5}=0$

In der abgeglichenen Schaltung beeinflußt damit Z5 nicht mehr das Ergebnis und es kann vereinfacht (weglassen von Z5) weiter gerechnet werden.

Widerstandsverhältnisse der abgeglichenen Brückenschaltung:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_3}{Z_4}$$

Gesamtwiderstand der abgeglichenen Brückenschaltung:

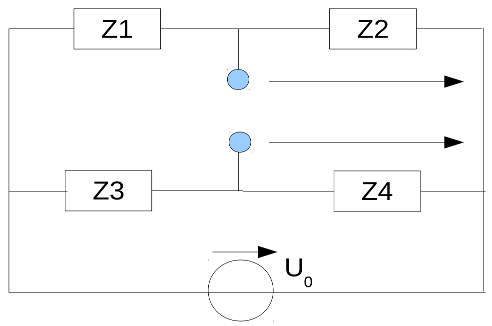
Prinzip: Zges=(Z1+Z2)||(Z3+Z4)

$$Z_{ges}=\frac{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}{(Z_1+Z_2)+(Z_3+Z_4)}$$

1.3 Lösungen bei nicht abgeglichener Brückenschaltung

1.3.1 Berechnung über Quellen mit komplexen Innenwiderständen

Der Trick bei dieser Berechnung ist, dass Z5 als Lastwiderstand angenommen wird.



Die Leerlaufspannungen berechnet sich über die Spannungsteiler. Beide Zweige können unabhängig voneinander gerechnet werden, da diese an die selbe ideale Spannungsquelle angeschlossen sind.

Leerlaufspannung des oberen Zweiges: $U_{01}=U_0 \cdot \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$

Leerlaufspannung des unteren Zweiges: $U_{02}=U_0 \cdot \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}$

Der Innenwiderstand wird bestimmt durch Berechnung des Gesamtwiderstandes von der Ausgangsseite her berechnet. Dabei werden alle Spannungsquellen in der Schaltung durch Kurzschlüsse ersetzt und die Stromquellen durch Unterbrechungen.

Dabei kann es passieren, dass es Widerstände gibt, die plötzlich in der Luft hängen und nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Dabei sind gerade solche Vorfälle verantwortlich dafür, dass über diesen Weg die Aufgabe sich mit weniger Rechenaufwand lösen läßt.

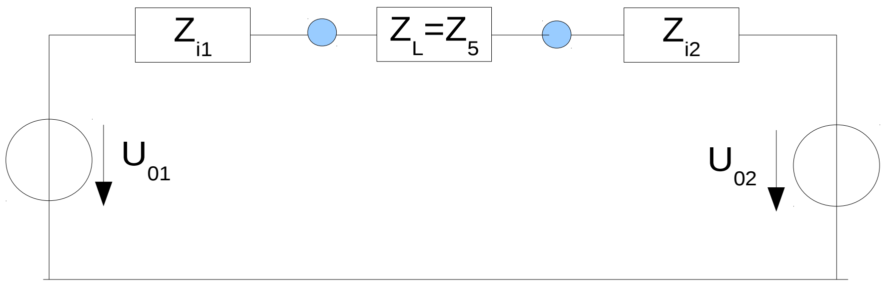
Dabei kann es passieren, dass es Widerstände gibt, die plötzlich über einen Kurzschluss überbrückt sind und nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Dabei sind gerade solche Vorfälle verantwortlich dafür, dass über diesen Weg die Aufgabe sich mit weniger Rechenaufwand lösen läßt.

Der Innenwiderstand ergibt sich als Parallelschaltung der Zweigwiderstände.

Der Innenwiderstand des oberen Zweiges: $Z_{i1}=\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1+Z_1}$

Der Innenwiderstand des unteren Zweiges: $Z_{i2}=\frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_3+Z_4}$

Somit ergibt sich folgendes Ersatzschaltbild:



Der Strom und auch der Spannungsabfall an Z5 kann so einfach berechnet werden.

$$I_{Z5}=\frac{U_{01}-U_{02}}{Z_{i1}+Z_5+Z_{i2}} \quad \text{und} \quad U_5=I_{Z5} \cdot Z_5$$

Wenn statt einer Spannungsquelle eine Stromquelle angeschlossen wäre, geht die Aufgabe nicht so einfach, da der Widerstand R5 den Spannungsabfall über der Schaltung ändert. Aber auch in dem Falle gibt es einen Behelf, indem sich die Spannung über der gesamten Schaltung über den Gesamtwiderstand berechnet werden kann.

In dem Falle wird statt der Eingangsspannung folgendes eingesetzt: $U_0=\frac{I_0}{Z_{ges}}$

1.3.2 Berechnung mittels Maschenverfahren

Aufstellen der Maschengleichungen:

$$\begin{array}{lllll}
U_0 & = & +J_1 \cdot (Z_1+Z_2) & +J_2 \cdot (-Z_1) & +J_3 \cdot (-Z_2) \\
0 & = & +J_1 \cdot (-Z_1) & +J_2 \cdot (Z_1+Z_3+Z_5) & +J_3 \cdot (-Z_5) \\
0 & = & +J_1 \cdot (-Z_2) & +J_2 \cdot (-Z_5) & +J_3 \cdot (Z_2+Z_4+Z_5)
\end{array}$$

3 Gleichungen und 3 Unbekannte

In einer Prüfung ist es sinnvoll über die ganze Seitenbreite mit Bleistift sich das Gerüst der

Gleichungen als Tabelle vorzuzeichnen und dann die Teilausdrücke gleich sortiert, wie hier einzutragen.

Für den Gesamtwiderstand gilt:

$Z_{ges}=\frac{U_0}{I_1}=\frac{U_0}{J_1}$ da in der Schaltung ersichtlich ist, dass $J_1=I_1$

Über das Determinantenverfahren läßt sich das J1 berechnen:

$$J_1=\frac{U_0\cdot((Z_1+Z_3+Z_5)(Z_2+Z_4+Z_5)-(-Z_5)(-Z_5))-()(()-())+()(()-())}{(Z_1+Z_2)\cdot((Z_1+Z_3+Z_5)(Z_2+Z_4+Z_5)-(-Z_5)(-Z_5))}$$

$$Z_{ges}=\frac{(Z_1+Z_2)\cdot((Z_1+Z_3+Z_5)(Z_2+Z_4+Z_5)-(-Z_5)(-Z_5))-()\cdot(()-())+()\cdot(()-())}{((Z_1+Z_3+Z_5)(Z_2+Z_4+Z_5)-(-Z_5)(-Z_5))}$$

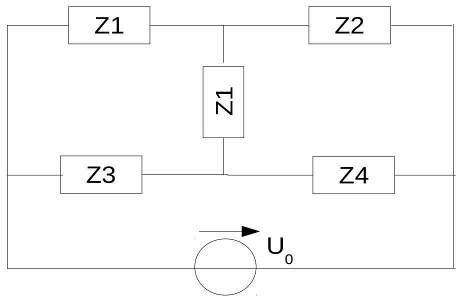
Die sich ergebende Ausdrücke sind zu lang für eine Seitenbreite, so dass hier im Zähler nur ein Drittel des Teilausdrucks angeben wurde.

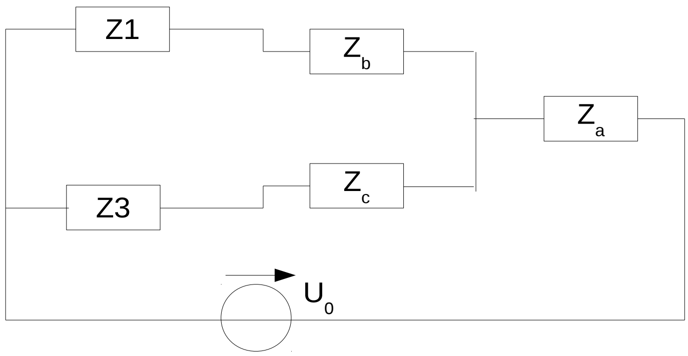
Über das Verwenden der Stromteilerbeziehung lassen sich aus J1 die Spannungen über Z2 und Z4 berechnen, da auch J1=I2+I4 ist. Anschließend wird mittels der Differenzspannung der Strom durch Z5 berechnet.

Alternativ kann J2 und J3 berechnet werden. Die Differenz von J3 und J2 ist der Strom durch Z5. Beide Wege in der Berechnung haben auch entsprechend lange Ausdrücke, da Determinanten zu berechnen sind, die bei denen nicht zwei Nullen in Zellen für weniger Rechenaufwand sorgen.

Das Verfahren in einer Prüfung durchzuziehen macht daher nur Sinn, wenn Bauteilwerte vorgegeben werden, die sich gut zusammenfassen lassen. Zum Beispiel, dass alle alle Rx=R und ein Widerstand R2=2R vorgegeben werden. Ähnliches gilt natürlich auch für Kapazitäten und Induktivitäten.

1.3.3 Umwandlung Dreieck-Stern, bzw. Stern-Dreieck





Hierbei ist auf saubere Beschriftung der Knoten zu achten, so dass die Anwendung der Formel nicht zum Verwechslungsabenteuer wird.

$$Z_a = \frac{Z_{ac} \cdot Z_{ab}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}} \qquad Z_b = \frac{Z_{bc} \cdot Z_{ab}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}} \qquad Z_c = \frac{Z_{ac} \cdot Z_{bc}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}}$$

Somit ergibt sich für den Gesamtwiderstand: Zges = ((Z1+Zb)||(Z3+Zc)) + Za

Über die Stromteilerbeziehungen können in den einzelnen Zweigen der jeweilige Strom berechnet werden und der jeweilige Spannungsabfall an den Widerständen Z1 und Z3. Über die Differenzspannung kann der Strom durch Z5 berechnet werden.

2 Berechnungsbeispiel mit MAXIMA / WXMAXIMA

```
(%i331) Z1: R;
        Z2: 2*R;
        Z3: R;
        Z4: R;
        Z5: R;
```

(%o331) R

(%o332) $2\,R$

(%o333) R

(%o334) R

(%o335) R

```
(%i281) F1: U0 = J1*(Z1+Z2) + J2*(-Z1) + J3*(-Z2);
        F2: 0 = J1*(-Z1) + J2*(Z1+Z3+Z5) + J3*(-Z5);
        F3: 0 = J1*(-Z2) + J2*(-Z5) + J3*(Z2+Z4+Z5);
        solve([F1,F2,F3],[J1,J2,J3]);
        F4: I5 = J3-J2 ;
        F5: ZG = U0/J1 ;
        solve([F1,F2,F3,F4,F5],[J1,J2,J3,I5,ZG]);
```

(%o281) $U0=-2\,J3\,R-J2\,R+3\,J1\,R$

(%o282) $0=-J3\,R+3\,J2\,R-J1\,R$

(%o283) $0=4\,J3\,R-J2\,R-2\,J1\,R$

(%o284) $\left[\left[J1=\frac{11\,U0}{13\,R},J2=\frac{6\,U0}{13\,R},J3=\frac{7\,U0}{13\,R}\right]\right]$

(%o285) $I5=J3-J2$

(%o286) $ZG=\frac{U0}{J1}$

(%o287) $\left[\left[J1=\frac{11\,U0}{13\,R},J2=\frac{6\,U0}{13\,R},J3=\frac{7\,U0}{13\,R},I5=\frac{U0}{13\,R},ZG=\frac{13\,R}{11}\right]\right]$

```
(%i275) H1: U01=U0*Z2/(Z1+Z2);
        H2: U02=U0*Z4/(Z3+Z4);
        H3: ZI1=Z1*Z2/(Z1+Z2);
        H4: ZI2=Z3*Z4/(Z3+Z4);
        H5: I5=(U01-U02)/(ZI1+Z5+ZI2);
        solve([H1,H2,H3,H4,H5],[U01,U02,ZI1,ZI2,I5]);
```

(%o275) $U01=\frac{2\,U0}{3}$

(%o276) $U02=\frac{U0}{2}$

(%o277) $ZI1=\frac{2\,R}{3}$

(%o278) $ZI2=\frac{R}{2}$

(%o279) $I5=\frac{U01-U02}{ZI2+ZI1+R}$

(%o280) $[[U01=\frac{2\,U0}{3},U02=\frac{U0}{2},ZI1=\frac{2\,R}{3},ZI2=\frac{R}{2},I5=\frac{U0}{13\,R}]]$

(%i341)
```
K1: ZA=(Z2*Z4)/(Z2+Z4+Z5) ;
K2: ZB=(Z2*Z5)/(Z2+Z4+Z5) ;
K3: ZC=(Z4*Z5)/(Z2+Z4+Z5) ;
K4: ZG=ZA+(ZB+Z1)*(ZC+Z3)/((ZB+Z1)+(ZC+Z3));
solve([K1,K2,K3,K4],[ZA,ZB,ZC,ZG]);
```

(%o341) $ZA=\frac{R}{2}$

(%o342) $ZB=\frac{R}{2}$

(%o343) $ZC=\frac{R}{4}$

(%o344) $ZG=\frac{(ZB+R)\,(ZC+R)}{ZC+ZB+2\,R}+ZA$

(%o345) $[[ZA=\frac{R}{2},ZB=\frac{R}{2},ZC=\frac{R}{4},ZG=\frac{13\,R}{11}]]$
