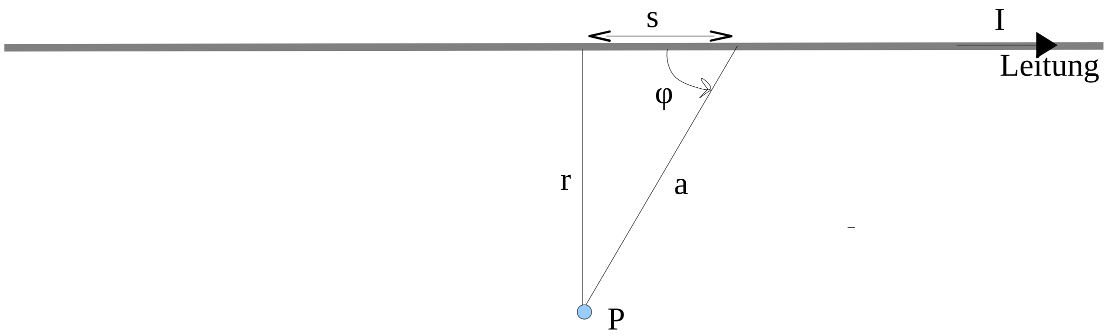
# 1 Aufgaben zum Magnetismus

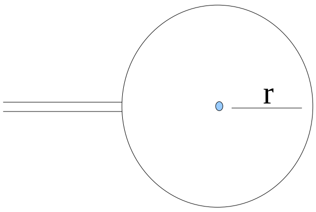
## 1.1 Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion - Kleine Rechenaufgabe für spätere Verwendung

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$$

## 1.2 Berechnen Sie das B-Feld eines unendlich langen Leiters in einem Punkt P außerhalb des Leiters.




## 1.3 Berechnen Sie das B-Feld in der Mitte einer Leiterschleife mit 5 Windungen.




## 1.4 Bestimmen Sie das B-Feld einer Doppelleitung (z.B. 2-adrigen Leitung) dessen Enden verbunden sind.

# 2 Hilfestellungen zu den Aufgaben

## 2.1 Hilfen zu Aufgabe 1.1 :

Umformen in $y=(x^2+c)^{-\frac{1}{2}}$ und Kettenregel

## 2.2 Hilfen zu Aufgabe 1.2 :

Betrachten Sie das B-Feld eines infinitesimalen Teilstücks des Leiters.

## 2.3 Hilfen zu Aufgabe 1.3 :

Geeignetes Koordinatensystem wählen.

## 2.4 Hilfen zu Aufgabe 1.4 :

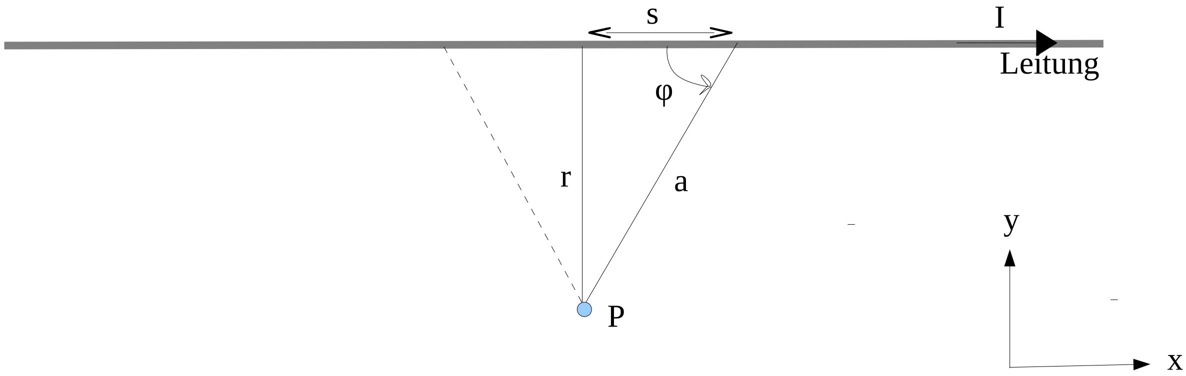
Betrachten Sie die Richtungen der einzelnen Teilschleifen und deren B-Felder.

# 3 Lösungen zu den Aufgaben

## 3.1 Lösung zu Aufgabe 1.1 :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2+c)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = -\frac{1}{2}\cdot(x^2+c)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\mathrm{x} = \frac{-x}{(x^2+c)^{\frac{3}{2}}}$$

## 3.2 Lösung zu Aufgabe 1.2 :




Im Abstand von einer Punktquelle (entspräche eines infinitesimalen Teilstückes auf der Leitung, oder einem dB von einem Streckenstück ds) gilt, dass die Intensität mit der Oberfläche der Abstandskugel abnimmt. Das wird bei den meisten Lösungen nicht als Hintergrundinformation mitgegeben.

$A_{Kugel} = 4\pi r^2$ d.h. $\text{Intensität} \approx \frac{1}{4\pi r^2}$ bzw. hier: $\frac{1}{4\pi a^2}$

Der Abstand kann mittels r und s ausgedrückt werden und der winkelabhängige Faktor ebenfalls.

$a(s) = \sqrt{r^2+s^2}$ und $\sin(\varphi(s)) = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}$

Die Komponenten in x-Richtung auf der rechten Seite heben sich mit denen auf der linken Seite aus Symmetriegründen auf. Die Komponenten in der y-Richtung addieren sich und daher sind nur dessen winkelabhängiger Faktor über die Sinusfunktion einfach zu berücksichtigen.

Besonders zu beachten ist hier, dass wir für die Berechnung der Feldstärke des B-Feldes hier die x-Komponenten und die y-Komponenten verwenden, aber der Richtungsvektor des B-Feldes aber in die z-Richtung zeigt. Das wird bei den meisten Lösungen nicht als Hintergrundinformation mitgegeben.

$$dB = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \frac{\sin(\varphi(s))}{4\pi(a(s))^2} \qquad dB = dB(s)\,ds$$

Wir nutzen zusätzlich noch die Symmetrie aus, d.h. statt von -∞ bis +∞ werden wir nur von 0 bis +∞ integrieren.

$$B = \int_{s:-\infty}^{s:+\infty} dB = 2 \cdot \int_{s=0}^{s:+\infty} dB$$

$$B = 2 \cdot \int_0^{+\infty} dB = 2 \cdot \int_0^{\infty} \mu_r \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \frac{\sin(\varphi(s))}{4\pi(a(s))^2} ds = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r}{(\sqrt{r^2+s^2})^3} ds$$

An dieser Stelle ist noch ein Trick verwendet um eine einfachere Funktion für das Integral verwenden zu können. Wir integrieren statt über die Variable s über die Variable r. Wenn sich im Abstand von s (wo Leiter und Linie a sich treffen), eine fiktive Punktquelle befindet, dann kann entlang des Weges der Linie r integriert werden um das gleiche Ergebnis zu erhalten. Dies funktioniert aber nur, wenn die Symmetrie ausgenutzt wurde. Aus dem Grunde wurde auch der Winkel links oben in der Ecke gewählt.

Wir vertauschen also s und r für das Integral und tauschen anschließend zurück für das einsetzen der Grenzen um ein einfacheres Integral (und auch Grenzwertberechnung) verwenden zu können.

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r}{(\sqrt{r^2+s^2})^3} ds = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ \int \frac{r}{(\sqrt{r^2+s^2})^3} dr \right]_{s=0}^{s \to \infty} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ \frac{-1}{(\sqrt{r^2+s^2})} + C \right]_0^{\infty}$$

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ \frac{-1}{(\sqrt{r^2+s^2})} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ (\lim_{s \to \infty} \frac{-1}{(\sqrt{r^2+s^2})}) - (\frac{-1}{(\sqrt{r^2+0^2})}) \right] = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ 0 - (\frac{-1}{r}) \right]$$

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi r} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H(r)$$

Wir erhalten somit eine bekannte Lösung für das B-Feld und H-Feld.

Und nun folgt die Lösung der Aufgabe ohne den Trick.

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r}{(\sqrt{r^2+s^2})^3} ds$$

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ \frac{s}{r \cdot \sqrt{(r^2+s^2)}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ (\lim_{s \to \infty} \frac{s}{r \cdot \sqrt{(r^2+s^2)}}) - (\lim_{s \to 0} \frac{s}{r \cdot \sqrt{(r^2+s^2)}}) \right]$$

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[ (\frac{1}{r}) - (0) \right] = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H(r)$$

Wir erhalten somit eine bekannte Lösung für das B-Feld und H-Feld, wie vorher.

## 3.3 Lösung zu Aufgabe 1.3 :

Im Abstand von einer Punktquelle (entspräche eines infinitesimalen Teilstückes auf der Leitung, oder einem dB von einem Streckenstück ds) gilt, dass die Intensität mit der Oberfläche der Abstandskugel abnimmt. Das wird bei den meisten Lösungen nicht als Hintergrundinformation mitgegeben.

$A_{Kugel}=4\pi r^2$ d.h. $\text{Intensität}\approx\frac{1}{4\pi r^2}$

Der Abstand für den Mittelpunkt ist hier immer r (d.h. hier konstant). Ein Teilstück ds auf dem Kreisring kann mittels Winkel im Bogenmaß und dem Radius r ausgedrückt werden.

$$ds=r\cdot d\varphi$$

Besonders zu beachten ist hier, dass wir für die Berechnung der Feldstärke des B-Feldes hier den Radius verwenden, der aus x-Komponenten und y-Komponenten bestehen würde, aber der Richtungsvektor des B-Feldes aber in die z-Richtung zeigt. Das wird bei den meisten Lösungen nicht als Hintergrundinformation mitgegeben.

$$dB=\mu_r\cdot\mu_0\cdot I\cdot\frac{r\cdot d\varphi}{4\pi r^2} \qquad dB=dB(\varphi)d\varphi$$

Wir nutzen zusätzlich noch die Symmetrie aus, d.h. wir rechnen zunächst nur eine Windung N=1 und nachher multiplizieren wir das Ergebnis mit der Windungsanzahl statt von 0 bis 2Nπ zu integrieren.

$$B=\int_{\varphi=0}^{\varphi=N\cdot 2\pi} dB=N\cdot\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dB$$

$$B=N\cdot\int_0^{2\pi} dB=N\cdot\int_0^{2\pi}\mu_r\cdot\mu_0\cdot I\cdot\frac{1}{4\pi r^2}\cdot r\,d\varphi=N\cdot\mu_r\cdot\mu_0\cdot\frac{I}{4\pi r}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$B=\frac{N\cdot\mu_r\cdot\mu_0\cdot I}{4\pi r}\cdot[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{N\cdot\mu_r\cdot\mu_0\cdot I}{4\pi r}\cdot[2\pi-0]=\mu_r\cdot\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{2r}=\mu_r\cdot\mu_0\cdot H$$

Wir erhalten somit eine bekannte Lösung für das B-Feld und H-Feld.

## 3.4 Lösung zu Aufgabe 1.4 :

Der Abstand der Leitungsschleifen ist sehr klein gegenüber dem Kreisdurchmesser. Somit sind die B-Felder vom Betrag der beiden Teilschleifen gleich, aber entgegengesetzt und heben sich somit auf. Das gesamte B-Feld ist daher Null.
[1]

1 Das Magnetfeld entsteht durch relativistische Effekte bewegter Ladungen (Relativitätstheorie von Einstein).